

Μουσική καί μαθηματικά, γράφει ὁ Θάνος Τάσιος

ΛΕΞΕΙΣ



Ὁ Θάνος Τάσιος εἶναι Μαθηματικός, M.Ed τοῦ Πάν. Ἀθηνῶν. **Τό In Nomine** τόν εὐχαριστεῖ γιά τήν παραχώρηση αὐτοῦ του πολύ κατατοπιστικοῦ καί ἐνδιαφέροντος ἄρθρου καί ἀναμένει τήν συνέχιση αὐτῆς τῆς συνεργασίας σέ ὅλα τά ἐπίπεδα.

Αρχαία ελληνική μουσική και μαθηματικά

Η μαθηματική θεωρίας της μουσικής: Η αριθμητική σε κίνηση



Ο Πλάτωνας στην "Πολιτεία" (530 c8 - 531 c8) αναφέρει τα 4 μαθήματα που κάνει ένα άτομο "ανώτερο". Αυτά είναι: Η αριθμητική, η γεωμετρία, η αστρονομία και η μουσική. Οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι (από τους οποίους το έργο του Πλάτωνα έχει επηρεαστεί) πίστευαν όπως αναφέρει ο ίδιος ο Πλάτων (530 d8) ότι αυτές είναι "αδελφές επιστήμες". Τα μαθήματα χωρίζονταν σε 4 γένη τα οποία συσχετιζόνταν μεταξύ τους:

Γεωμετρία: Μεγέθη σε ακινησία

Αστρονομία: Μεγέθη σε κίνηση

Αριθμητική: Αριθμοί σε ακινησία

Μουσική: Αριθμοί σε κίνηση

Οι **Πυθαγόρειοι** είχαν διαπιστώσει ότι για την αρμονία δεν είχαν σημασία τα απόλυτα μήκη των χορδών (το κούρδισμα δηλαδή του οργάνου) μιας λύρας αλλά η μεταξύ τους σχέση η οποία καθορίζει και την μελωδία στη μουσική. Είναι η σχέση μεταξύ δύο

χορδών (των μηκών τους) μιας λύρας η οποία αποτελεί ένα μουσικό διάστημα (δίχορδο) - όπως ακριβώς και στη θεωρία των λόγων μεταξύ αριθμών μπορεί διαφορετικοί αριθμοί (αριθμητής και παρονομαστής) να δίνουν το ίδιο κλάσμα: $1/2 = 4/8$. Ένα διχορδο λοιπόν μπορούμε να το φανταστούμε ως λόγο αριθμών (κλάσμα). Οι αριθμοί αυτοί θα είναι τα μήκη των χορδών μιας λύρας.

Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν την λύρα και όπως αναφέρει ο **Ιάμβλιχος** στο έργο του "περί Πυθαγορείου βίου" τους αυλούς τους θεωρούσαν "υβριστικόν" (αλλαζονικό) όργανο. Χρησιμοποιούνταν η οχτάχορδη λύρα (Βαβυλωνιακής προέλευσης). Οι ονομασίες των χορδών της αναφέρονται από τον **Νικόμαχο τον Γερασινό** (2 αιώνας μ.Χ.) στο έργο του "πυθαγόρειου αρμονικού εγχειριδίου κεφάλαια", χωρίο 11,4,13-30).

Τον **Φιλόλαο** (5-4 αιώνας π.Χ.) στο έργο του "Περί Φύσεως" τον ενδιαφέρουν μόνο οι χορδές με μήκη 6, 8, 9 και 12 μονάδες μήκους αντιστοιχα (ανεξάρτητα όπως τονίσαμε από την μονάδα μήκους που χρησιμοποιείται κάθε φορά, αφού αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μεταξύ τους σχέση και όχι τα απόλυτα μεγέθη).

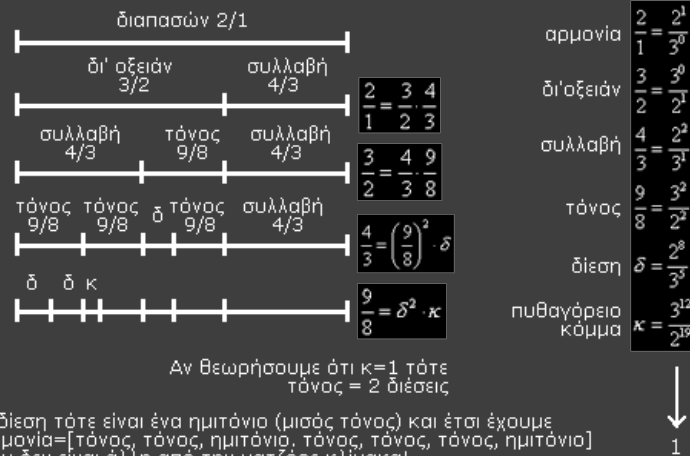
Ονομασία χορδής	Μήκος χορδής	"Σύμφωνα" μουσικά διαστήματα			
νήτη	12	$\left[\begin{array}{l} \text{"συλλαβή"} \\ \text{(δία τεσσάρων} \\ \text{χορδών} \\ \text{συχχορδία)} \end{array} \right]$ $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	$\left[\begin{array}{l} \text{"δι'οξειάν"} \\ \text{ή "ημιόλιον"} \\ \text{(δία πέντε} \\ \text{χορδών} \\ \text{συχχορδία)} \end{array} \right]$ $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$	$\left[\begin{array}{l} \text{"τόνος" ή} \\ \text{"επομόδιον"} \end{array} \right]$ $\frac{9}{8}$	$\left[\begin{array}{l} \text{"δία πασών"} \\ \text{των χορδών} \\ \text{συχχορδία} \end{array} \right]$ $\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$
παρανήτη	9				
τρίτη	8				
παραμέση	6				

Οι Πυθαγόρειοι ασχολούνταν με τα μουσικά διαστήματα $2/1$ ("αρμονία" ή οκτάβα) και $3/2$ ("δι'οξειάν" ή "δία πέντε"). Τους απασχολούσε η εύρεση κοινού μέτρου για τα διαστήματα αυτά. Η ανακάλυψη δηλαδή κάποιας σχέσης συμμετρίας (ενός διαστήματος που κάποιο πολλαπλάσιο του να παράγει τα διαστήματα αυτά). Στο απόσπασμα 6 από το έργο του Φιλόλαου "περί φύσεως" διασώζονται οι εξής σχέσεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων:

Η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της μουσικής

(Η σύνθεση μουσικών διαστημάτων αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό των μηκών των χορδών)

αποτομές
(ανθυφαιρετικά υπόλοιπα)



Τα διαδοχικά διαστήματα που δημιουργούνται κατά τις ανθυφαιρέσεις είναι λόγοι μεταξύ δυνάμεων του 2 και του 3. Η διαδικασία οφείλει να σταματήσει όταν κάποιος από τους λόγους αυτούς γίνει ίσος με τη μονάδα, οπότε και ο προηγούμενος λόγος που θα έχει βρεθεί θα αποτελεί και το κοινό μέτρο που αναζητούμε ο οποίος και λόγος και θα καταμετρεί και το αρχικό διάστημα (αλλά και όλα τα άλλα). Οι λόγοι όμως αυτοί, εξ' αιτίας της μορφής τους ($2^m/3^n$) όσο και να αυξάνουν οι εκθέτες, προσεγγίζουν τη μονάδα, χωρίς όμως ποτέ να γίνουν ίσοι με αυτή. Τα μεγέθη αυτά είναι λοιπόν ασύμμετρα και η πολλαπλασιαστική διαδικασία της ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι άπειρη, καθώς κανένα από τα προκύπτοντα διαστήματα δε μπορεί να αποτελέσει κοινό μέτρο αυτής και τα αρχικά μεγέθη 2/1, 3/2 είναι μεταξύ τους ασύμμετρα.

Τα αποτελέσματα αυτά ήταν γνωστά στους πυθαγορείους και μάλλον είναι το πρώτο αποτέλεσμα - ένδειξη περί ασυμμετρίας στη φύση στο οποίο είχαν καταλήξει (πριν ακόμα ανακαλύψουν την ασυμμετρία της τετραγωνικής ρίζας του 2).

Η ανθυφαίρεση (δηλαδή ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών) ήταν μέθοδος γνωστή στους πυθαγορείους πολύ πριν τον **Ευκλείδη**, ο οποίος την αναφέρει στο VII βιβλίο των στοιχείων του (πεπερασμένη ανθυφαίρεση αριθμών) και στο X βιβλίο (άπειρη ανθυφαίρεση μεγεθών) και πρέπει να ήταν το ουσιαστικό βήμα της μετάβασης (αναφέρεται και από τον Αριστοτέλη ένας ανθυφαιρετικός ορισμός της αναλογίας στα "τοπικά") από την προγενέστερη (εμπειρική) θεωρία λόγων με βάση την αρμονία (πυθαγόρεια μαθηματική θεωρία της μουσικής) στην μετέπειρα εξελιγμένη μορφή τους όπως υπάρχει στον Ευκλείδη.

Πεπερασμένη ανθυφαίρεση -> Συμμετρα μεγέθη (ή αριθμοί) (υπάρχει μέγιστο

κοινό μέτρο)

Άπειρη ανθυφαίρεση -> Ασυμμετρία μεγεθών

Εμπειρική θεωρία λόγων μεγεθών	Ανθυφαίρεση μεγεθών Αριστοτέλης, "τοπικά" $\alpha/\beta = \beta/\gamma \Leftrightarrow$ $\text{Ανθ}(\alpha, \beta) = \text{Ανθ}(\gamma, \delta)$	Θεωρία αναλογιών μεγεθών (Εύδοξος, βιβλίο V Στοιχείων Ευκλείδη)
Εμπειρική θεωρία λόγων αριθμών (Πυθαγόρεια θεωρία με βάση την αρμονία)	Θεωρία αναλογιών αριθμών (Θεαίτητος, βιβλία VII, X Στοιχείων Ευκλείδη)	

Οι αριθμοί για τους αρχαίους θεωρούνταν οι θετικοί ακέραιοι μόνο. Το μηδέν δεν θεωρούνταν αριθμός καθώς επίσης και την μονάδα δεν την θεωρούσαν αριθμό, αλλά διαχώριζαν την μονάδα ως την οντότητα εκείνη η οποία δημιουργεί τους αριθμούς. (Θεωρούσαν την μονάδα ως το ον το οποίο με τη βοήθεια του απείρου (δηλαδή διαδοχικές προσθέσεις μονάδων) μας δίνει με επαγωγικά βήματα το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Μονάς (αριθμός 1) Αριθμοί
Χρονική στιγμή (τώρα) Χρόνος
Αρμονία Μουσικός φθόγγος

Υπήρχε σαφής διαχωρισμός στα μαθηματικά των αρχαίων ανάμεσα στους αριθμούς (θετικοί ακέραιοι) και τα μεγέθη (μήκη, εμβαδά, όγκοι). Τα μεγέθη χαρακτηρίζονταν από το συνεχές. Οι αρχαίοι λέγοντας άπειρο εννοούσαν μόνο το διακριτό - αριθμήσιμο άπειρο (όπως το άπειρο του πλήθους των φυσικών ακεραίων που ο ένας προκύπτει επαγωγικά από τον προηγούμενο του με πρόσθεση μιας μονάδας).

Αναλογία: Ισότητα λόγων

Ανθυφαίρεση: Αμοιβαία διαδοχική αφαίρεση μεγεθών του μικρότερου από το μεγαλύτερο κάθε φορά, κατά ένα maximal τρόπο κάθε φορά (αφαιρώντας κάθε φορά όσα ακέραια πολλαπλάσια μπορούμε...)

πχ. Ας δούμε την ανθυφαίρεση $\text{Ανθ}(27, 23)$

$$27 = 1 \cdot 23 + 4$$

$$23 = 5 \cdot 4 + 3$$

$$4 = 1 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

Άρα $\text{Ανθ}(27,23) = [1,5,1,3]$. Στο παράδειγμα μας μέγιστος κοινός διαιρέτης $(27,23) = 1$

πχ. Για την ανθυφαίρεση των 48 και 32 έχουμε τα εξής βήματα:

$$48 = 1 \cdot 32 + 16$$

$$32 = 2 \cdot 16 + 0$$

Άρα $\text{Ανθ}(48,32) = [1,2]$ και $\mu.\kappa.\delta.(48,32) = 16$ (Είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς που διαιρούν τον 48 και τον 32 ταυτόχρονα).

Η έννοια της **ανθυφαίρεσης** χαρακτηρίζει τη φιλοσοφία του Πλάτωνα. Για να μελετήσουμε το έργο του **Πλάτωνα** χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά (μια και ο Πλάτωνας ήταν επηρεασμένος από την πυθαγόρεια αριθμοκεντρική φιλοσοφία) αλλά και αντίστροφα, χρησιμοποιούν οι ιστορικοί των μαθηματικών τα έργα του Πλάτωνα για να αποκτήσουν εικόνα της μαθηματικής γνώσης της εποχής. Η έννοια της ανθυφαίρεσης είναι θεμελιώδης για τον Πλάτωνα. Η κοσμοθεωρία του είναι ανθυφαιρετική και πιστεύει ότι κάθετι στη φύση δημιουργείται και εξελίσσεται με ανθυφαιρετικές διαδικασίες. **Η ζωή, ο θάνατος, η κοσμογονία, οι φιλοσοφικές ιδέες και έννοιες, όλα διαρθρώνονται με βάση την ανθυφαίρεση.**

Θάνος Τάσιος,
Μαθηματικός, M.Ed του Παν. Αθηνών

Σημειώσεις:

Ανθυφαίρεση: Αμοιβαία διαδοχική αφαίρεση μεγεθών του μικρότερου από το μεγαλύτερο κάθε φορά, κατά ένα *maximal* τρόπο κάθε φορά (αφαιρώντας κάθε φορά όσα ακέραια πολλαπλάσια μπορούμε σε ένα ελάχιστο υπόλοιπο...

Πλάτωνας και μαθηματικά: για να μελετήσει κανείς την φιλοσοφία του Πλάτωνα σωστά είναι απαραίτητο να γνωρίζει καλά τα μαθηματικά εργαλεία της εποχής του, ώστε να ερμηνεύσει σωστά τα έργα του. Η κοσμοθεωρία του Πλάτωνα είναι ανθυφαιρετική. Πιστεύει ότι κάθετι στη φύση δημιουργείται και εξελίσσεται με ανθυφαιρετικές διαδικασίες. Η ζωή, ο θάνατος, η κοσμογονία, οι φιλοσοφικές ιδέες και έννοιες, όλα

διαρθρώνονται με βάση την ανθυφαίρεση. Είναι η ιδέα της διαλεκτικής. Ο Πλάτωνας ανθυφαιρούσε λέξεις αντί για γεωμετρικά μεγέθη.

1025 Έμφανίσεις | 2 Σχόλια | Βαθμολογία: ■■■■(5 βαθμολογήσεις)